MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 1

Introduction aux notions de norme et de distance

Exercice 1. On pose pour $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\|X\|_2 = (\textstyle\sum_{i=1}^d x_i^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|X\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^d |x_i|,$$
$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le d} |x_i|.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^d$.

2) Montrer que

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le d\|X\|_\infty,\ \forall X \in \mathbb{R}^d.$$

3) Montrer que

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{d}\|X\|_\infty,\ \forall X \in \mathbb{R}^d.$$

Exercice 2. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Montrer l' identité du parallèlogramme :

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2),\ X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

Exercice 3. Soit $d(X,Y)$ la distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\delta(X,Y) = \begin{cases} d(X,Y) \text{ si } 0, X, Y \text{ alignés,} \\ d(0,X) + d(0,Y) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On pose pour $x > 0$ $\log_{10}(x) = \dfrac{\log x}{\log 10}$, et

$$d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(xy^{-1})| \text{ pour } x > 0, y > 0.$$

1) Montrer que $d_{\log}$ est une distance sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculer

$$d_{\log}(10^p, 10^q) \text{ pour } p, q \in \mathbb{Z}.$$

3) Montrer qu' il n' existe pas de constance $C > 0$ telle que

$$d_{\log}(x,y) \le C|x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$$

Indication : prendre $x = 1$ et $y = y_n$ pour une suite (y_n) bien choisie.

4) Montrer qu' il n' existe pas de constante $C > 0$ telle que

$$|x-y| \le C d_{\log}(x,y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}.$$

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 2

Espaces métriques

Exercice 1. Soit E un ensemble. On pose

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y, \\ 0 \text{ si } x = y. \end{cases} .$$

1) Montrer que d est une distance sur E (appelée la *distance discrète*) et déterminer les boules $B(x,r)$ et $\tilde{B}(x,r)$ pour $r \geq 0$ et $x \in E$.

2) Montrer que tous les singletons $\{x\}$ pour $x \in E$ sont ouverts.

3) Déterminer les ensembles ouverts de (E,d).

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique. Sur $X \times X$ on définit

$$\delta(x,y) = \min(1, d(x,y)).$$

1) Montrer que (X,δ) est un espace métrique.

2) a) Montrer que une suite (u_n) dans X converge pour d si et seulement si elle converge pour δ.

b) Les espaces (X,δ) et (X,d) ont-ils les mêmes ensembles ouverts ?

3) Montrer que $\delta(x,y) \leq d(x,y)$ pour tous $x,y \in X$.

Sous quelles conditions existe-t-il une constante $C > 0$ telle que $d(x,y) \leq C\delta(x,y)$ pour tous $x,y \in X$?

Exercice 3.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si vous pensez qu' une affirmation est juste, donnez en une démonstration. Si vous pensez qu' elle est fausse, donnez en un contre-exemple.

1) Si $(u_n) \in \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $\|u_n\| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^2$ avec $u_n = (x_n, y_n)$. Si $\|u_n\| \to \infty$ quand $n \to \infty$ alors $|x_n| \to +\infty$ ou $|y_n| \to \infty$.

3) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Si A n'est pas ouvert, alors A est fermé.

4) Soit (E,d) un espace métrique. Une partie $A \subset E$ peut être à la fois ouverte et fermée.

5) Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a,b]$ avec $a < b$.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et le justifier :

1) $\forall A, B \subset X,\ A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B,$

2) $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \partial A \cap \partial B = \emptyset,$

3) $\forall A, B \subset X, \partial B \subset A \subset B \Rightarrow \partial B \subset \partial A,$

1) $\forall A, B \subset X,\ d(A,B) = 0$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \partial A \cap \partial B = \emptyset.$

Exercice 5. Soit E un ensemble et d la métrique discrète sur E. Montrer que $F \subset E$ est compact si et seulement si F est un ensemble fini.

Exercice 6. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, et f une application continue de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2).

1) Si (E_1, d_1) est compact, montrer que $f(F)$ est fermé pour tout fermé F de (E_1, d_1).

2) Est-ce encore vrai si on ne suppose plus (E_1, d_1) compact ?

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique et $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de compacts non vides de X. On note

$$K = \bigcap_{n\geq 1} K_n .$$

1) Montrer que $K \neq \emptyset$.

2) Montrer que K est compact.

3) Soit U un ouvert de (X, d) contenant K. Montrer qu'il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, $K_n \subset U$.

Exercice 8. Si d_1, d_2 sont deux distances sur X, on note $d_1 \sim d_2$ si d_1 et d_2 sont (métriquement) équivalentes.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d' équivalence c'est à dire que

$$\begin{aligned}
&d \sim d,\\
&d_1 \sim d_2 \Rightarrow d_2 \sim d_1,\\
&d_1 \sim d_2 \text{ et } d_2 \sim d_3 \Rightarrow d_1 \sim d_3.
\end{aligned}$$

Exercice 9. Soit (E_i, d_i) $i = 1, 2$ deux espaces métriques avec (E_1, d_1) compact et $f : E_1 \to E_2$ continue.

1) Montrer que si $F \subset E_1$ est fermé, alors $f(F) \subset E_2$ est fermé.

2) En déduire que si $f : E_1 \to E_2$ est une bijection, alors $f^{-1} : E_2 \to E_1$ est continue.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A, B \subset X$ on rappelle que

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

On dit que $d(A, B)$ est *atteinte* si il existe $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ tels que $d(A, B) = d(a_0, b_0)$.

Déterminer si $d(A, B)$ est atteinte dans les cas suivants :

1) A et B sont fermés,

2) A est fermé, B est compact.

3) A et B sont compacts.

Exercice 11. Soit $A, B, C \subset E$ des parties d' un espace métrique (E, d).

1) Montrer que si $C \subset B$ alors $d(A, B) \leq d(A, C)$.

2) On note par $\bar{A}$ l' adhérence d' un ensemble A. Montrer que

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B) \text{ pour tous } A, B \subset E.$$

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 3

Ouverts, fermés, intérieurs, adhérences dans $\mathbb{R}^d$

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle.
Déterminer l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants :

$$
\begin{aligned}
&A = \left\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\right\}, \\
&B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 \geq 1\right\}, \\
&C = \mathbb{Z}^2, \\
&D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,, y > 0\,, x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \\
&E = \left\{\left(x, x \sin \frac{1}{x}\right) : x > 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle.
Déterminer la frontière ∂A des ensembles suivants :

1) $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$
2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1, |y| < 1\}$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle.

Déterminer la frontière ∂A des ensembles suivants :

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$
2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$
3) $A = \{(x,2x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$
4) $A = \{(x,2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, trouver un ensemble D dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\partial D = [1,2]$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle. On considère les sous-ensembles

définis par

$$
\begin{aligned}
&A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\right\}, \\
&B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 1\right\}, \\
&C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 \leq 0\right\},
\end{aligned}
$$

On pose

$$D = (A \cap B) \cup C\,.$$

1) L'ensemble D est-il compact ?

2) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de D.

Exercice 6. Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}^2$, muni de sa distance usuelle. On pose

$$A + B = \{X + Y : X \in A, Y \in B\}.$$

1) Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert.

2) Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}, \ B = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Montrer que A et B sont fermés.

3) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 4

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Les fonctions suivantes ont-elles une limite à l' origine ?

$$f_1(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_2(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}),\ f_3(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2},$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ f_5(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_6(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|},$$
$$f_7(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2},\ f_8(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2},\ f_9(x,y) = \frac{(x+y)^2+x^3}{x^2+y^2}.$$

Indication : on pourra le cas échéant utiliser de nouvelles coordonnées, comme les coordonnées polaires ou des coordonnées associées à un nouveau repère de $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Etudier les limites :

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)),\ \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)),\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Exercice 3. Etudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin((xy)^{-1}), \text{ si } xy \neq 0, \\ 0 \text{ si } xy = 0, \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 \text{ si } y > x^2, \\ y^2 \text{ si } y \leq x^2. \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles (là où elles sont définies) des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y},\ f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ f_3(x,y) = \sin(x+\cos y),$$
$$f_4(x,y) = \arctan(yx^{-1}),\ f_6(x,y) = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y + 1},\ f_7(x,y) = \log(x+\sqrt{x^2+y^2}).$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Calculer $g'(t)$.

Exercice 6. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l' existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.

Exercice 7. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 et $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Exprimer les expressions suivantes en utilisant la fonction F et les variables r, θ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}, \ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \ \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exercice 8. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes. Pour chaque point critique

déterminer sa nature à l' aide de la matrice hessienne.

$f_1(x, y) = x^3 + y^3, \ f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \ f_3(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2),$

$f_4(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6, \ f_5(x, y) = xy + 50x^{-1} + 20y^{-1},$

$f_6(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2, \ f_7(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2, \ f_8(x, y) = xy^2 + x^2 - y^2 - x.$

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 5

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel normé. Montrer que pour $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés les applications

$$E \ni x \mapsto u + x \in E,\ E \ni x \mapsto \lambda x \in E$$

sont continues.

Exercice 2. Soit (X, d) égal à $C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $f : [0,1] \ni x \mapsto x$. Calculer $d(f, A)$ pour les ensembles

$$\begin{aligned}
&1) \quad A = \{g \in C([0,1];\mathbb{R}) : g(0) = 0\},\\
&2) \quad A = \{g \in C([0,1];\mathbb{R}) : g(0) \geq 0\},\\
&3) \quad A = \{g \in C([0,1];\mathbb{R}) : g(0) < 0\},\\
&4) \quad A = \{g \in C([0,1];\mathbb{R}) : g(0) = 1\},
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On note $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

1) Montrer que si A ou B est ouvert, $A + B$ est ouvert.

2) Montrer que si A et B sont compacts, $A + B$ est compact.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et $d(x, y) = \|x - y\|$ la distance associée. Montrer que la boule fermée $\tilde{B}(a, r)$ est l' adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ si $r > 0$.

Exercice 5. On pose $E = C^1([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$ et

$$N(f) := |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'(x)|.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer qu' il existe $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C N(f),\ \forall f \in E.$$

3) Mêmes questions pour

$$N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

Exercice 6. Soit $E = C^1([0,1];\mathbb{R})$. Comparer les normes

$$N_1(f) = \|f\|_\infty,\ N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f\|_1,\ N_3(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,\ N_4(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_1.$$

Exercice 7. Soit $\mathbb{R}[X]$ l' espace des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k. On pose

$$\|P\|_1 := \int_0^2 |P(x)|dx.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}_k[X]$. On écrit

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{k} a_{n,j} X^j.$$

Montrer que si $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ pour $\|\cdot\|_1$ avec $P = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$, alors pour tout $0 \leq j \leq p$ on a $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = a_j$ pour tout $0 \leq j \leq p$.

3) En déduire que $P \in \mathbb{R}_k[X]$.

4) L' ensemble $\mathbb{R}_k[X]$ est-il ouvert, fermé dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$?

Exercice 8. On note par $l_c(\mathbb{N})$ l' espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $u_n = 0$ sauf pour un nombre fini d' indices n.

1) Montrer que $l_c(\mathbb{N})$ est dense dans $l^p(\mathbb{N})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

2) $l_c(\mathbb{N})$ est-il dense dans $l^\infty(\mathbb{N})$?

3) Montrer que $l^p(\mathbb{N})$ est inclus dans $l^q(\mathbb{N})$ si $p \leq q$.

4) Montrer que l' application identité n'est pas continue de $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_q)$ dans $(l^p, \|\cdot\|_p)$ si $p < q$.

Exercice 9. Soit $E = C^1([0,1];\mathbb{R})$. Comparer les normes

$$N_1(f) = \|f\|_\infty,\ N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f\|_1,\ N_3(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,\ N_4(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_1.$$

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}[X]$ l' espace des polynômes à coefficients réels. Pour $a \geq 0$ on pose

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(x)|dx,\ P \in \mathbb{R}[X].$$

1) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $0 \leq a < b$ avec $b > 1$. En raisonnant par l' absurde et en considérant les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

3) Montrer que si $a, b \in [0,1]$ les normes N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 11. Soit L l' espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ *Lispschitziennes*. Pour $f \in L$ on pose

$$C(f) := \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|},$$

et $N(f) = \|f\|_\infty + C(f)$.

1) Montrer que N est une norme sur L.

2) les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

3) Montrer que (L, N) est un espace complet.

Exercice 12. Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l' espace vectoriel des suites bornées à valeurs réelles, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $l_\infty(\mathbb{N})$ le sous ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1) Montrer que $l_\infty(\mathbb{N})$ est un sous espace vectoriel de $l^\infty(\mathbb{N})$.

2) Montrer que $l_\infty(\mathbb{N})$ est une partie fermée de $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 6

Exercices supplémentaires sur les espaces vectoriels normés

Exercice 1. Une suite réelle sera notée $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, son n-ième terme sera noté $u(n)$. Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l' espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u(n)|.$$

On note par $l^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{N})$ le sous ensemble de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites nulles à partir d' un certain rang et par $l^\infty_0(\mathbb{N})$ le sous ensemble des suites u telles que $\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$.

1) Déterminer si les ensembles $l^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{N})$ et $l^\infty_0(\mathbb{N})$ sont ouverts, resp. fermés.

2) Montrer que $l^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{N})$ est dense dans $l^\infty_0(\mathbb{N})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3) Soit $A \subset l^\infty(\mathbb{N})$ l' ensemble des suites croissantes bornées . Montrer que A est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4) Soit $u_1, u_2 \in l^\infty(\mathbb{N})$ deux suites convergentes, c'est à dire telles que $\lim_{n\to\infty} u_i(n) = l_i \in \mathbb{R}$ existe pour $i = 1, 2$. Montrer que

$$|l_1 - l_2| \leq \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Soit C l' ensemble des suites convergentes. Montrer que $C \subset l^\infty(\mathbb{N})$ et que C est un fermé de $l^\infty(\mathbb{N})$.

5) Construire une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d' éléments de $l^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite réelle $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ mais la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie de E. On note par $\mathrm{Vect}(A)$ l' espace vectoriel engendré par A, c' est à dire l' ensemble des combinaisons linéaires (finies) d' éléments de A.

Montrer que

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Adh}(A)) \subset \mathrm{Adh}(\mathrm{Vect}(A)).$$

Exercice 3. Soit $A, B, C \subset E$ des parties d' un espace vectoriel normé E.

1) Montrer que si $C \subset B$ alors $d(A, B) \leq d(A, C)$.

2) On note par $\bar{A}$ l' adhérence d' un ensemble A. Montrer que

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B) \text{ pour tous } A, B \subset E.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E.

1) Montrer que $\mathrm{Adh}(F)$ est un sous espace vectoriel de E.

2) Montrer que si $\mathrm{Int}(F) \neq \emptyset$ alors $F = E$.

Exercice 5. On note par $E = \mathbb{R}[X]$ l' espace des polynômes à coefficients réels $P(x) =$

$\sum_{n=0}^{d} a_n x^n$.

1) Montrer que

$$N_1(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x \in [1,2]} |P(x)|$$

sont des normes sur E.

2) On considère l' application linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0). \end{array}$$

Montrer que φ est continue pour la norme N_1. *Indication : utiliser la caractérisation des applications linéaires continues vue en cours.*

3) On rappelle que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ on a

$$|\mathrm{e}^y - \sum_{n=0}^{N} \frac{y^n}{n!}| \leq \frac{|y|^{N+1}}{N+1!} \mathrm{e}^{|y|}$$

En déduire que pour tout $C \geq 1$ et $1 \leq x \leq 2$ on a

$$|\mathrm{e}^{-Cx} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| \leq \frac{|2C|^{N+1}}{N+1!} \mathrm{e}^{2C}$$

4a) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu' il existe $C > 0$ assez grand tel que

$$\sup_{x \in [1,2]} |\mathrm{e}^{-Cx}| \leq \epsilon/2.$$

4b) On fixe la constante C obtenue au point 4a). Montrer, en utilisant le point 3) et l' inégalité triangulaire pour la valeur absolue, qu' il existe $N \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\sup_{x \in [1,2]} |\sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| \leq \epsilon.$$

Indication : On admettra que pour tout $C \geq 1$ on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C^{N+1}}{N+1!} = 0.$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme $P(x)$ (dépendant de ϵ) tel que

$$P(0) = 1, \; N_2(P) \leq \epsilon.$$

5) Montrer que l 'application linéaire φ définie au point 2) n 'est pas continue pour la norme N_2.

Exercice 6. On considère l' espace vectoriel normé $C([-1,1])$ des fonctions continues à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f(x)|$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ pour } -1 \leq x < -\dfrac{1}{n} \\ 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{n}{2} x^2 \text{ pour } -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n} \\ 1 - x \text{ pour } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

1b) Déterminer la fonction $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ dans $C([-1,1])$.
Indication : commencer par dessiner les graphes de quelques fonctions f_n.

1c) L' ensemble $C^1([0,1])$ est-il fermé dans $C([-1,1])$?

Exercice 7. Soit E l' ensemble $E = \{u \in C^1([0,1];\mathbb{R}) : u(0) = 0\}$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) On pose

$$N_1(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)|, \; N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

3a) Montrer que

$$|u(x)| \leq N_1(u), \; \forall u \in E.$$

3b) En déduire que

$$N_2(u) \leq 2N_1(u), \; \forall u \in E.$$

4a) Montrer que si $u \in E$ alors

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t))\mathrm{e}^t dt.$$

Indication : calculer la dérivée du membre de droite et utiliser que $u \in E$.

4b) Montrer que

$$|(u(t) + u'(t))\mathrm{e}^t| \leq \mathrm{e}N_2(u), \forall t \in [0,1].$$

On rappelle que e *est la base du logarithme népérien.*

4c) En déduire que

$$|u(x)| \leq \mathrm{e}N_2(u), \; \forall x \in [0,1].$$

4d) Montrer qu' il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$N_1(u) \leq CN_2(u), \; \forall u \in E.$$

MDD251 Année 2024-2025
Feuille d' exercices n° 7

Systèmes d' équations différentielles

Exercice 1. Calculer les puissances A^k, $k \in \mathbb{N}$ et l 'exponentielle e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les puissances A^k, $k \in \mathbb{N}$ et l 'exponentielle e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3+a & 1 \end{pmatrix}$. On considère le système différentiel

$$(E_a)\ u'(t) = M_a u(t).$$

Si $\mathbb{R} \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^2$ est une solution de (E_a), l ' ensemble $C_u = \{u(t) : t \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$ est appelé la *trajectoire* de la solution u.

1) Montrer que $\{(0,0)\}$ est une trajectoire pour le système (E_a).

2) Rappeler quelle est l' expression de la solution générale de (E_a).

3) Existe-t-il des trajectoires qui sont incluses dans des droites ? (discuter en fonction de la valeur de a).

4) Pour $a = -3, 1, 2$ résoudre le système (E_a).

Exercice 4. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 9y \\ y' = x - 5y \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 3y + 3z \\ y' = 3x - 5y + 3z \\ z' = 6x - 6y + 4z \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x' = 3y \\ y' = x - 2y + 4z \\ z' = x + y + z \end{array} \right..$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1, \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) + t \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) - \sin t, \\ y'(t) = -3x(t) - 4y(t) + \cos t \end{array} \right..$$